

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 24.01.2023

Parte I - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

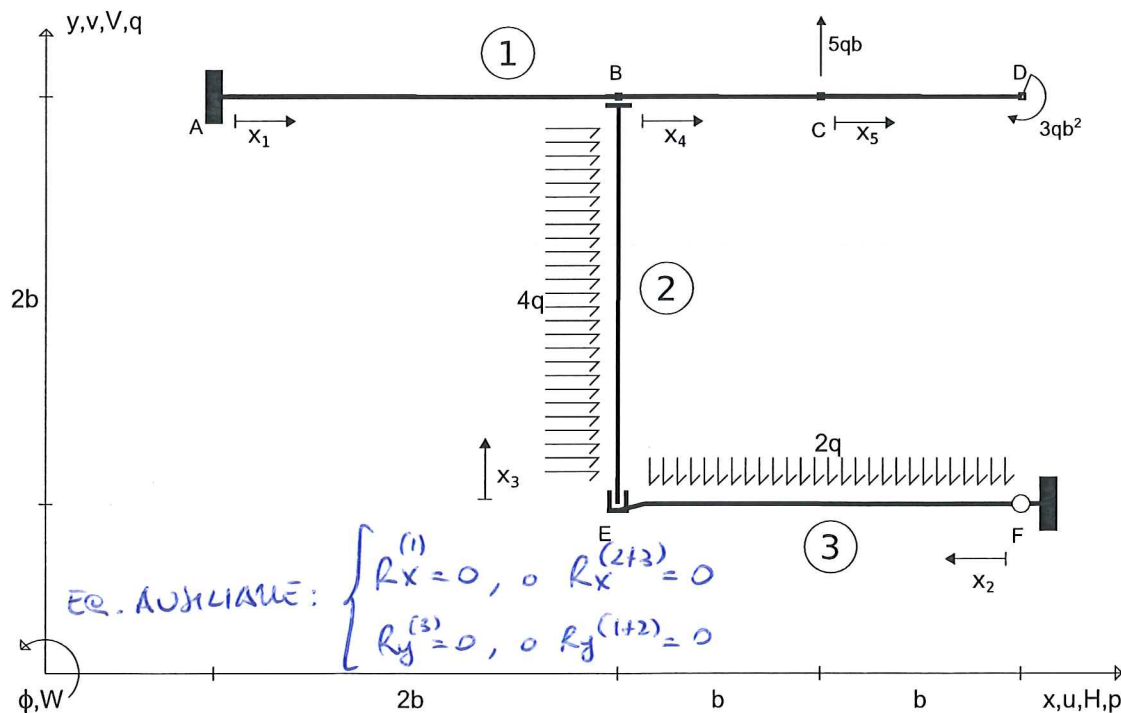
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*001



Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

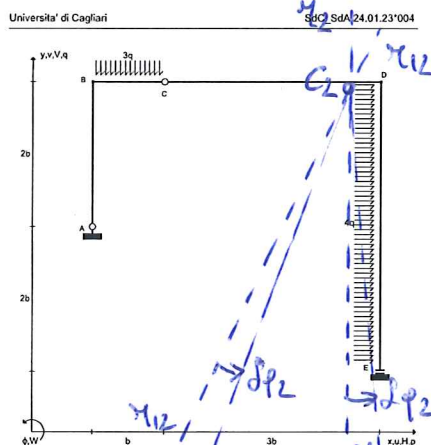
1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

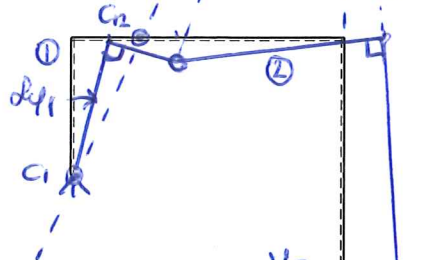
In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \in \pi_2 \end{cases}$$



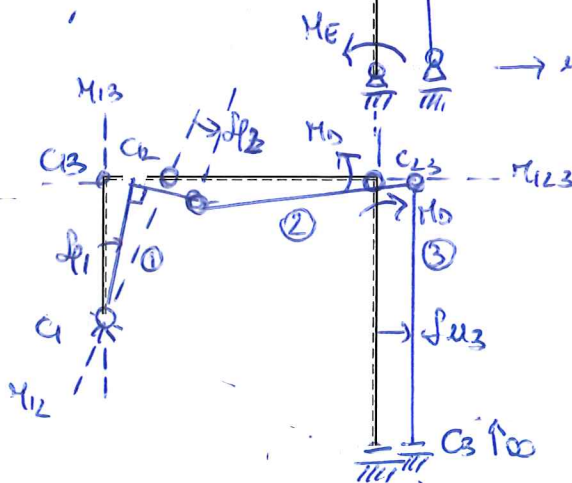
$$\downarrow v_C = b \delta p_1 = 3b \delta p_2$$

$$\boxed{\delta p_1 = 3 \delta p_2}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$C_2 = (4b, 8b)$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 & C_{13} \in \pi_{13} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_{23} \in \pi_{23} \end{cases}$$



$$\rightarrow u_E = 10b \delta p_2 = \frac{10}{3} b \delta p_1$$

$$\boxed{\delta p_1 = 3 \delta p_2}$$

$$\rightarrow u_D = 2b \delta p_1 = 6b \delta p_2$$

$$\downarrow v_B = 0$$

$$M_E(\mathcal{A}) = \frac{-265}{2} pb^2; C_1 = (0, 0); C_2 = (46, 86); C_{12} = (b, 2b);$$

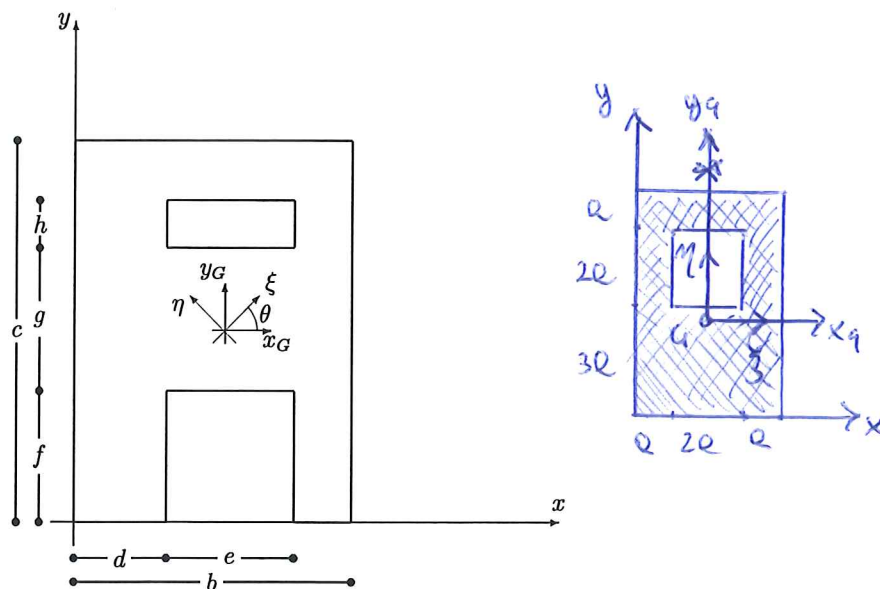
$$u_E = 10b \rho_2 = \frac{10}{3} b \rho_1; v_C = -b \rho_1 = 3b \rho_2;$$

$$M_D(\mathcal{A} \square \mathcal{A}) = \frac{-20}{2} pb^2; u_D = 2b \rho_1 = 6b \rho_2; v_B = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 6a$; $d = 1a$; $e = 2a$; $f = 0$; $g = 3a$; $h = 2a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del *doppio* dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



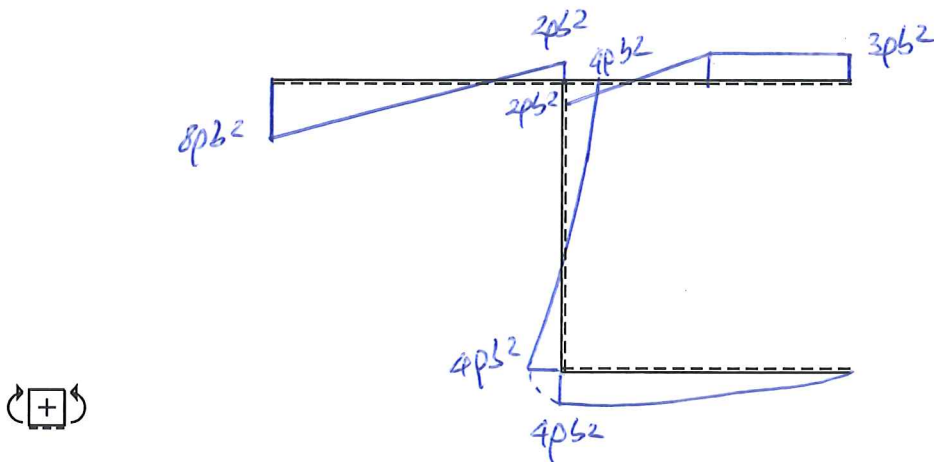
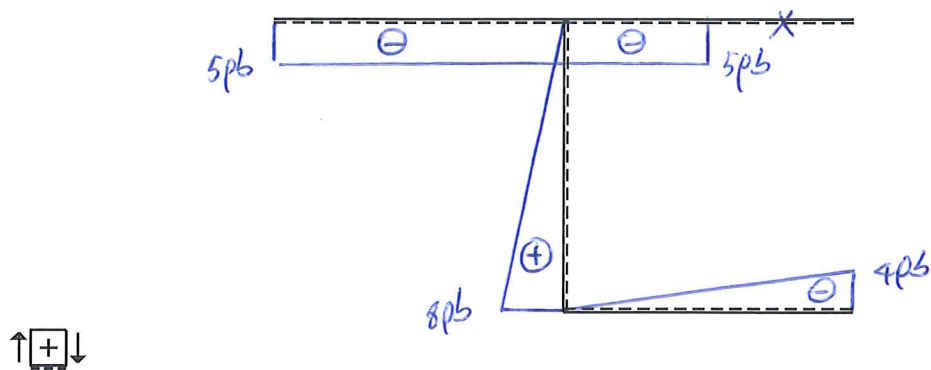
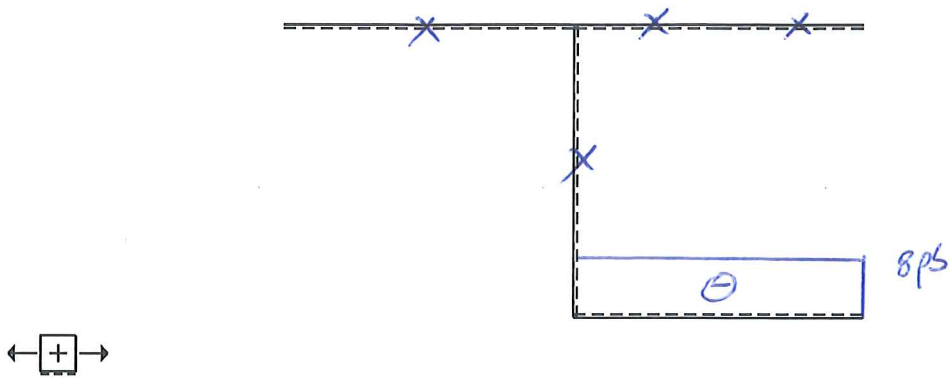
$$S_x = 56 a^3; S_y = 40 a^3;$$

$$x_G = 2,000 a; y_G = 14/5 a = 2,800 a;$$

$$J_{xG} = 988/15 a^4 = 65,866 a^4; J_{yG} = 32/3 a^4 = 30,666 a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [\psi = 0^\circ];$$

$$J_\xi = J_{\max} = 988/15 a^4; J_\eta = J_{\min} = 32/3 a^4;$$



$H_A (\Rightarrow) = 0$; $V_A (\uparrow) = -5pb$; $M_A (\curvearrowright) = -8pb^2$; $H_F (\Rightarrow) = -8pb$; $V_F (\uparrow) = 4pb$;

$N_{AB} = //$; $T_{AB} = -5pb$; $M_{AB} = 8pb^2 - 5pb \times 1$;

$N_{BC} = //$; $T_{BC} = -5pb$; $M_{BC} = 2pb^2 - 5pb \times 4$;

$N_{CD} = //$; $T_{CD} = //$; $M_{CD} = -3pb^2$;

$N_{FE} = -8pb$; $T_{FE} = -4pb + 2p \times 2$; $M_{FE} = -4pb \times 2 + p \times 2^2$;

$N_{EB} = //$; $T_{EB} = 8pb - 4p \times 3$; $M_{EB} = -4pb^2 + 8pb \times 3 - 2p \times 3^2$;

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 24.01.2023

Parte I - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

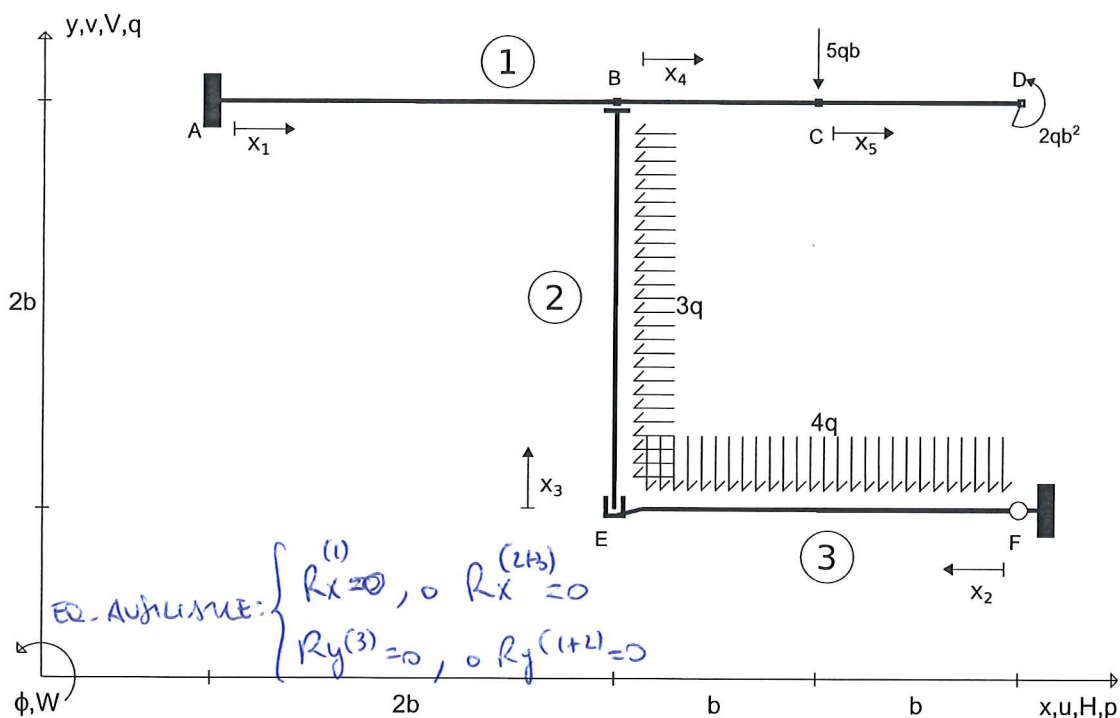
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*002



Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

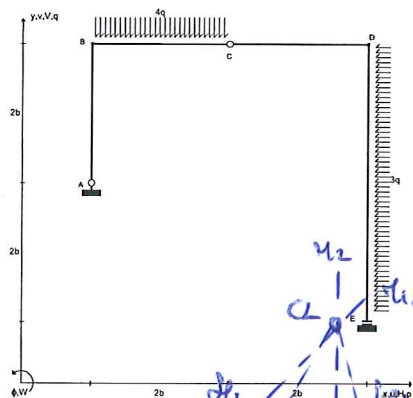
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

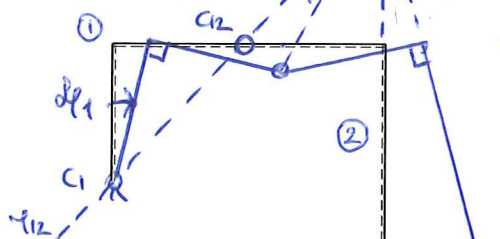
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 24.01.23*005



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \in \pi_{12} \end{cases}$$



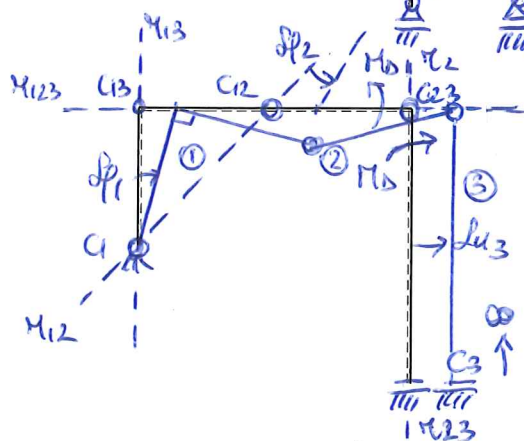
$$\downarrow v_C = 2b \delta \phi_1 = 2b \delta \phi_2$$

$$\boxed{\delta \phi_1 = \delta \phi_2}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{13} \leftrightarrow C_3 & C_{13} \in \pi_{13} \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} & C_{13} \in \pi_{123} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in \pi_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in \pi_{23} \end{cases}$$

$$C_2 = (4b, 4b)$$



$$\rightarrow M_E = 6b \delta \phi_2 = 6b \delta \phi_1$$

$$\boxed{\delta \phi_1 = \delta \phi_2}$$

$$\rightarrow M_D = 2b \delta \phi_1 = 2b \delta \phi_2$$

$$\downarrow v_B = 0$$

$$M_E(\hat{\sigma}) = 40ab^2; C_1 = (0, 0); C_2 = (4b, 4b); C_{12} = (2b, 2b);$$

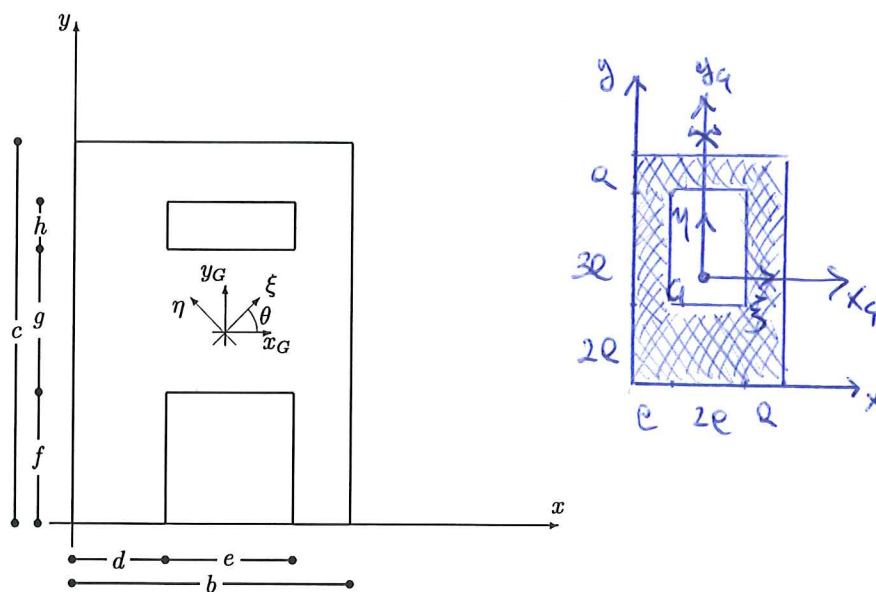
$$u_E = 6b^2p_1 = 6b^2p_2; v_C = -2b^2p_1 = -2b^2p_2;$$

$$M_D(\hat{\sigma} \square \hat{\sigma}) = 16ab^2; u_D = 2b^2p_1 = 2b^2p_2; v_B = 0;$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: Si noti che il disegno non è in scala!) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 6a$; $d = 1a$; $e = 2a$; $f = 0$; $g = 2a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



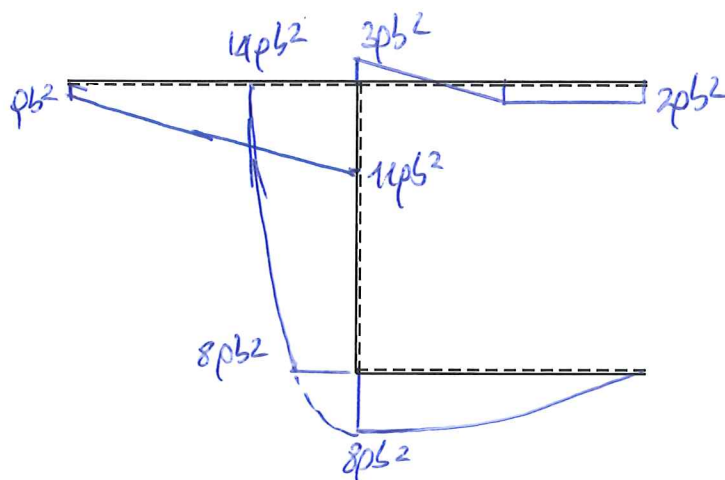
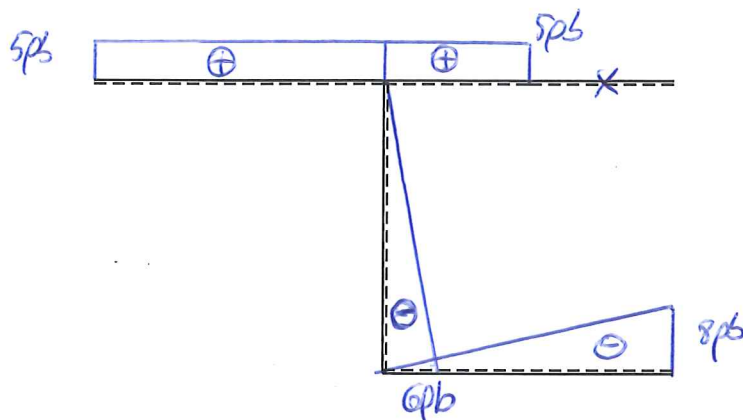
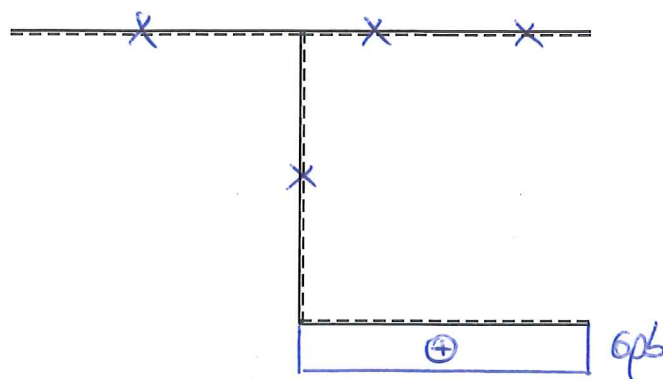
$$S_x = 51a^3; S_y = 36a^3;$$

$$x_G = 2,000a; y_G = 17/6a = 2,833a;$$

$$J_{xG} = 13 1/2 a^4 = 65,500a^4; J_{yG} = 30,000a^4;$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 \quad [2\theta = 0^\circ];$$

$$J_\xi = J_{\max} = 13 1/2 a^4; J_\eta = J_{\min} = 30,000a^4;$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= 5p; & M_A (\curvearrowright) &= -p^2; & H_F (\Rightarrow) &= 6p; & V_F (\uparrow) &= 8p; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 5p; & M_{AB} &= p^2 + 5pbx_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= 5p; & M_{BC} &= -3p^2 + 5pbx_4; \\
 N_{CD} &= //; & T_{CD} &= //; & M_{CD} &= 2p^2; \\
 N_{FE} &= 6p; & T_{FE} &= -8p + 4qx_2; & M_{FE} &= -8pbx_4 + 2qx_4^2; \\
 N_{EB} &= //; & T_{EB} &= -6p + 3qx_3; & M_{EB} &= -8p^2 - 6pbx_5 + \frac{3}{2}qx_5^2;
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2022-2023

Prova scritta in aula del 24.01.2023

Parte I - Testo 3

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Esprimere i risultati in forma frazionaria o con almeno 3 cifre decimali.

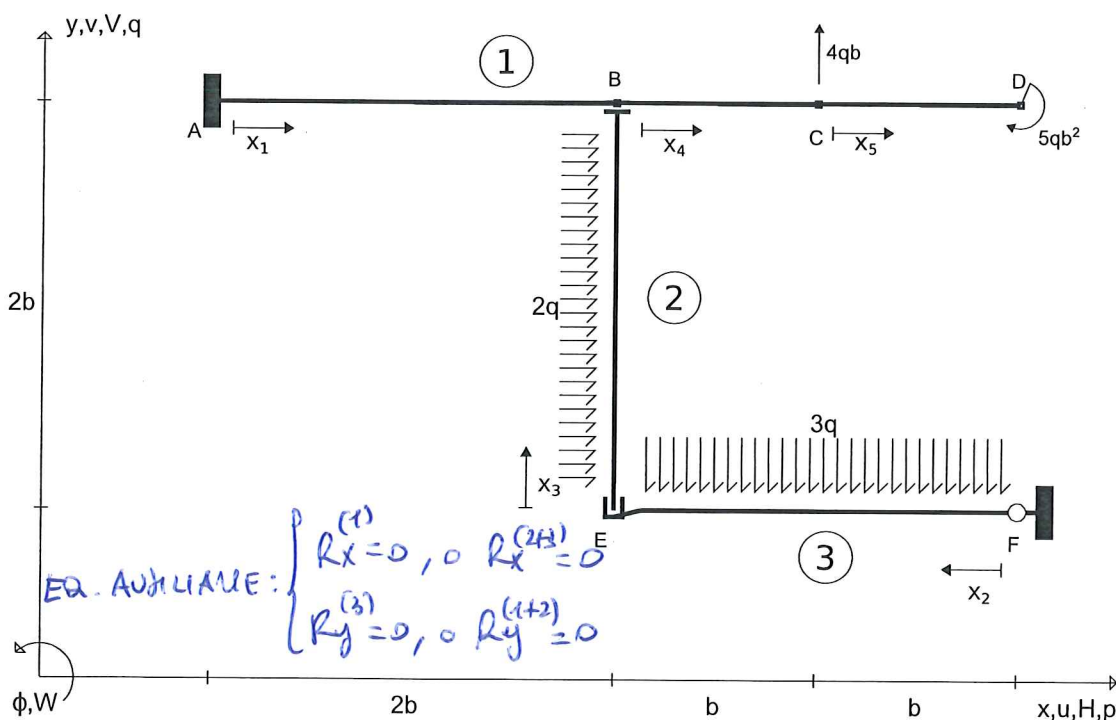
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere la struttura isostatica riportata in Figura calcolando le reazioni vincolari, le equazioni delle azioni interne e tracciando nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 24.01.23*003



Esercizio n. 2 (11 punti)

Per la struttura, indicata in Figura, determinare la reazione vincolare M_E applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Si richiede di:

1. Determinare le coordinate (riferite all'origine A) del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 1 (asta ABC), C_1 , del centro di istantanea rotazione assoluto del corpo 2 (asta CDE), C_2 , del centro di istantanea rotazione relativo fra i due corpi, C_{12} ;
2. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
3. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto E , u_E , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto C , v_C .

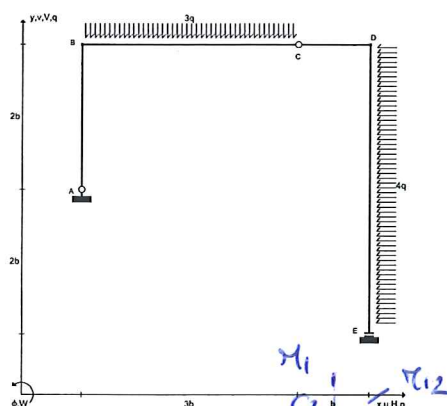
Calcolare poi, riapplicando il PLV, il valore del momento flettente nel punto D , M_D .

In questa situazione (nella quale la struttura è suddivisa nelle tre aste ABC , CD , DE) si richiede di:

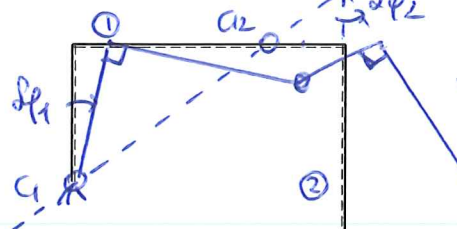
4. Tracciare nel grafico predisposto la spostata rigida corrispondente agli spostamenti virtuali che la struttura può subire;
5. Valutare, in funzione dell'ampiezza dell'atto di moto, la componente orizzontale dello spostamento virtuale del punto D , u_D , e quella verticale dello spostamento virtuale del punto B , v_B .

Nota: Nel caso di punti impropri, si indichino le coordinate dei centri di rotazione in questa forma: (∞, m) , dove m è il coefficiente angolare della retta a cui appartiene il punto improprio.

Università di Cagliari SdC_SdA 24.01.23'006



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{12} \\ C_2 \in r_{12} \end{cases}$$



$$v_C = 3b \delta \phi_1 = b \delta \phi_2$$

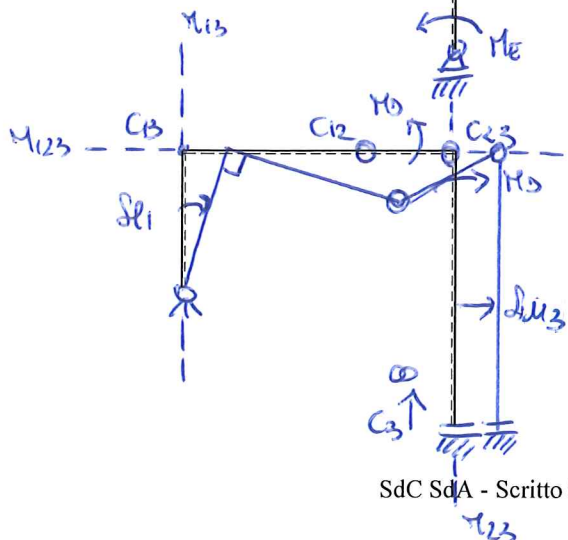
$$\delta \phi_1 = \frac{1}{3} \delta \phi_2$$

$$u_E = \frac{14}{3} b \delta \phi_2 = 14 b \delta \phi_1$$

$$\delta \phi_1 = \frac{1}{3} \delta \phi_2$$

$$u_D = 2b \delta \phi_1 = \frac{2}{3} b \delta \phi_2$$

$$v_B = 0$$



$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{12} \leftrightarrow C_2 & C_2 \in r_{12} \\ C_2 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 & C_2 \in r_{23} \\ C_2 = (4b, 8/3b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_3 \\ C_{12} \leftrightarrow C_{23} \leftrightarrow C_{13} \end{cases}$$

$$M_E(\varphi) = \frac{228}{6} p b^2; C_1 = (0, 0); C_2 = (4b, \frac{8}{3}b); C_{12} = (3b, 2b);$$

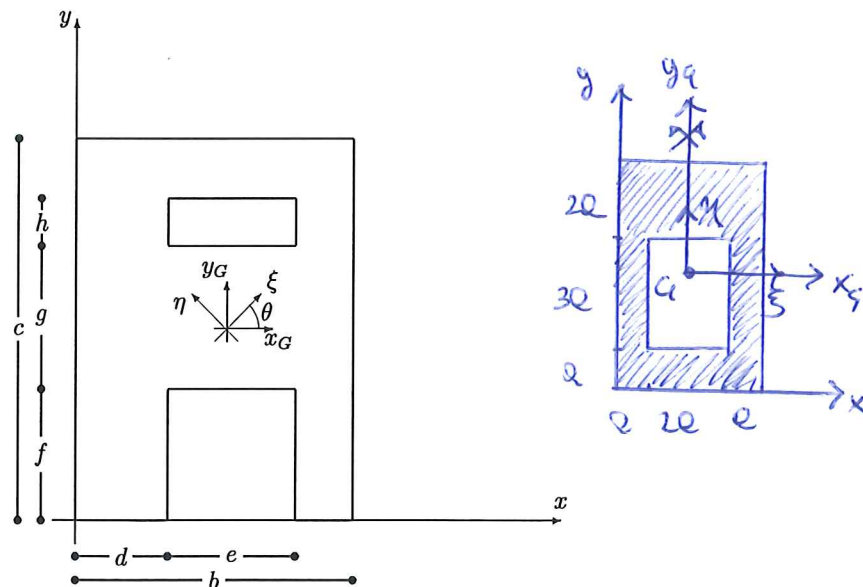
$$u_E = \frac{14}{3} b p_2 = 14 b p_1; v_C = -3b p_1 = -6b p_2$$

$$M_D(\varphi) = \frac{37}{6} p b^2; u_D = \frac{4}{3} b p_2 = 2b p_1; v_B = 0$$

Esercizio n. 3 (5 punti)

Per la lamina piana omogenea rappresentata in Figura (NB: *Si noti che il disegno non è in scala!*) nella quale le misure quotate sono le seguenti: $b = 4a$; $c = 6a$; $d = 1a$; $e = 2a$; $f = 0$; $g = a$; $h = 3a$ si richiede di:

- calcolare i momenti statici, S_x e S_y (rispetto agli assi x e y indicati);
- calcolare le coordinate del baricentro x_G e y_G rispetto ai medesimi assi;
- calcolare i momenti di inerzia J_{xG} e J_{yG} e il momento centrifugo J_{xGyG} rispetto agli assi baricentrici;
- calcolare i momenti centrali d'inerzia, $J_\xi = J_{\max}$ e $J_\eta = J_{\min}$ rispetto agli assi centrali d'inerzia, ξ , η ;
- calcolare la tangente trigonometrica, $\tan 2\theta$, del doppio dell'angolo θ formato dagli assi x_G e ξ .



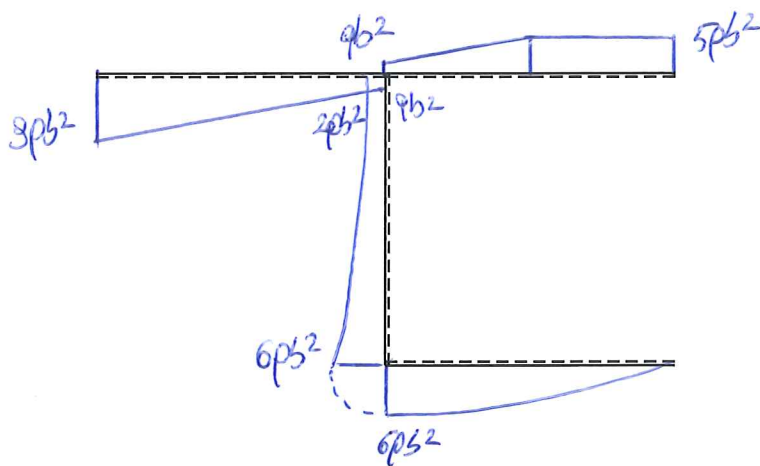
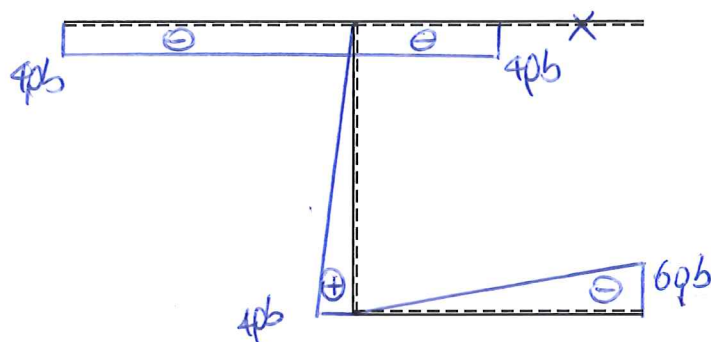
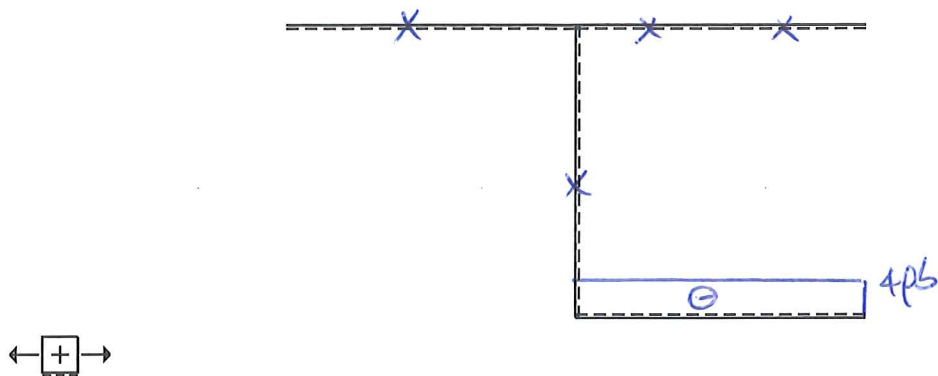
$$S_x = 57e^3; S_y = 36e^3;$$

$$x_G = 2,000a; y_G = \frac{18}{6}e = 3,166e$$

$$J_{xG} = 13\frac{1}{2}e^4 = 65,500e^4; J_{yG} = 30,000e^4$$

$$J_{xGyG} = 0; \tan 2\theta = 0 [\psi = 0^\circ]$$

$$J_\xi = J_{\max} = 13\frac{1}{2}e^4; J_\eta = J_{\min} = 30,000$$



$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\uparrow) &= -4qb; & M_A (\curvearrowright) &= -8qb^2; & H_F (\Rightarrow) &= -4qb; & V_F (\uparrow) &= 6qb; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= -4qb; & M_{AB} &= 8qb^2 - 4qb \times 1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= -4qb; & M_{BC} &= -qb^2 - 4qb \times 4; \\
 N_{CD} &= //; & T_{CD} &= //; & M_{CD} &= -5qb^2; \\
 N_{FE} &= -4qb; & T_{FE} &= -6qb + 3q \times 2; & M_{FE} &= -6qb \times 2 + \frac{3}{2} q \times 2^2; \\
 N_{EB} &= //; & T_{EB} &= 4qb - 2q \times 3; & M_{EB} &= -6qb^2 + 4qb \times 3 - q \times \frac{3^2}{2};
 \end{aligned}$$